

## PROGRAM WYKŁADU Z ANALIZY MATEMATYCZNEJ 1

### 1. Wstępne wiadomości o funkcjach

- Definicja funkcji, składanie funkcji, funkcja odwrotna, wykres funkcji.

### 2. Liczby rzeczywiste

- Aksjomaty zbioru liczb rzeczywistych.
- Zbiory ograniczone, kresy, istnienie pierwiastka, konsekwencje aksjomatu kresu górnego: zasada Archimedesesa, nieograniczoność z góry zbioru liczb naturalnych, gęstość zbioru liczb wymiernych.
- Wartość bezwzględna, interpretacja geometryczna zbioru liczb rzeczywistych.
- Rozszerzony zbiór liczb rzeczywistych.
- Podstawowe twierdzenia związane z zupełnością zbioru liczb rzeczywistych:
  - lemat Ascoliiego (o ciągu przedziałów zstępujących);
  - pokrycie, twierdzenie Heinego-Borela;
  - punkt skupienia zbioru, twierdzenie Bolzano-Weierstrassa.

### 3. Ciągi liczbowe

- Definicja ciągu zbieżnego.
- Własności ciągów zbieżnych.
- Ciągi monotoniczne.
- Liczba  $e$ .
- Podciągi.
- Ciągi Cauchy'ego, zupełność zbioru liczb rzeczywistych.
- Granice dolna i górna, zbieżność niewłaściwa.

### 4. Granica funkcji

- Definicje granicy funkcji w sensie Cauchy'ego i Heinego.
- Działania arytmetyczne na granicach, granice a nierówności, granica funkcji złożonej.
- Granice jednostronne.
- Granice nieskończone i granice w nieskończoności.

### 5. Funkcje ciągłe

- Definicja funkcji ciągłej.
- Własności lokalne funkcji ciągłych.
- Nieciągłości.

- Własność Darboux.
- Twierdzenie Weierstrassa o osiągnięciu kresów.
- Ciągłość jednostajna, twierdzenie Cantora.
- Monotoniczność a ciągłość, ciągłość funkcji odwrotnej.
- Ciągłość funkcji elementarnych.

## 6. Pochodne

- Definicja i interpretacja geometryczna pochodnej, różniczka.
- Różniczkowalność a ciągłość.
- Działania arytmetyczne na funkcjach różniczkowalnych.
- Twierdzenia o pochodnej funkcji złożonej i o pochodnej funkcji odwrotnej.
- Pochodne wyższych rzędów.

## 7. Zastosowania pochodnych

- Twierdzenia o wartości średniej w rachunku różniczkowym.
- Monotoniczność, ekstrema, warunki konieczne i dostateczne na istnienie ekstremum funkcji różniczkowalnej.
- Wzór Taylora.
- Funkcje wypukłe, punkty przegięcia, warunki konieczne i dostateczne na wypukłość funkcji różniczkowalnej.
- Symbole nieoznaczone, reguła de l'Hôpitala.
- Badanie przebiegu zmienności funkcji.

## 8. Szeregi liczbowe

- Definicja szeregu zbieżnego, warunek Cauchy'ego i warunek konieczny zbieżności, szeregi: geometryczny i harmoniczny.
- Operacje na szeregach.
- Szeregi o wyrazach nieujemnych, kryteria zbieżności: porównawcze, pierwiastkowe, ilorazowe, zasada zagęszczania Cauchy'ego.
- Szeregi o wyrazach dowolnych znaków, kryteria: Dirichleta, Abela i Leibniza.
- Zbieżność bezwzględna i warunkowa, zmiana kolejności wyrazów szeregu, twierdzenie Riemanna (bez dowodu).
- Mnożenie szeregów, twierdzenie Mertensa.
- Szeregi dwustronne.

## 9. \*Przestrzeń $\mathbb{R}^n$

- Definicja przestrzeni  $\mathbb{R}^n$ : struktura liniowa, iloczyn skalarny, norma (długość) wektora.
- Zbieżność ciągów w przestrzeni  $\mathbb{R}^n$ .

---

\*Ten punkt będzie omawiany w przypadku wystarczającej ilości czasu.

## LITERATURA

### Podręczniki

- [1] G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t. 1 i 2, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2007.
- [2] K. Kuratowski, *Rachunek różniczkowy i całkowy. Funkcje jednej zmiennej*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2008.
- [3] H. i J. Musielakowie, *Analiza matematyczna*, t. I, cz. 1 i 2, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2004 (t. 1, cz. 1), 2002 (t. 1, cz. 2).
- [4] W. Rudin, *Podstawy analizy matematycznej*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2009.
- [5] A. Sołtysiak, *Analiza matematyczna, Części I i II*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2009 (cz. I), 2004 (cz. II).

### Zbiory zadań

- [1] J. Banaś, S. Wędrychowicz, *Zbiór zadań z analizy matematycznej*, WNT, Warszawa 2006.
- [2] G. N. Berman, *Zbiór zadań z analizy matematycznej*, Wydawnictwo Pracowni Komputerowej Jacka Skalmierskiego, Gliwice 1999.
- [3] B. P. Demidowicz, *Zbiór zadań z analizy matematycznej*, t. 1 i 2, Naukowa Książka, Lublin 1992 (t. 1) i 1993 (t. 2).
- [4] M. Gewert, Z. Skoczylas, *Analiza matematyczna 1, Przykłady i zadania*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2010.
- [5] M. Gewert, Z. Skoczylas, *Analiza matematyczna 2, Przykłady i zadania*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2010.
- [6] W. J. Kaczor, M. T. Nowak, *Zadania z analizy matematycznej*, t. 1 i 2, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2005.
- [7] W. Krysicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach*, t. 1, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2008.
- [8] I. A. Maron, *Zadania z rachunku różniczkowego i całkowego. Funkcje jednej zmiennej*, PWN, Warszawa 1974.