

## PROGRAM WYKŁADU Z ANALIZY MATEMATYCZNEJ 2

### 1. Całka nieoznaczona

- Definicja i istnienie funkcji pierwotnej.
- Całkowanie przez części i przez podstawienie.
- Wzory rekurencyjne.
- Obliczanie podstawowych typów całek nieoznaczonych:
  - całkowanie funkcji wymiernych;
  - całkowanie funkcji niewymiernych, podstawienia Eulera;
  - całkowanie funkcji trygonometrycznych.

### 2. Całka Riemanna

- Definicja całki Riemanna, kryterium całkowalności.
- Całkowalność funkcji ciągłej, całkowalność funkcji monotonicznej.
- Własności całki.
- Twierdzenie o funkcji górnej granicy całkowania, wzór Newtona-Leibniza.
- Wzory na całkowanie przez części i przez podstawienie dla całek oznaczonych.
- Twierdzenia o wartości średniej w rachunku całkowym.
- Geometryczne zastosowania całek: pole figury, długość łuku, objętość bryły obrotowej.
- Definicja logarytmu za pomocą całki, funkcja wykładnicza.

### 3. Całki niewłaściwe

- Definicja i podstawowe własności całek niewłaściwych.
- Zbieżność bezwzględna i warunkowa, kryteria: Cauchy'ego, porównawcze i Dirichleta.
- Całkowe kryterium zbieżności szeregów.

### 4. Elementy analizy zespolonej

- Definicja i podstawowe własności liczb zespolonych.
- Zbieżność w  $\mathbb{C}$ , ciągi i szeregi o wyrazach zespolonych.
- Granica i ciągłość funkcji zespolonych.
- Różniczkowanie i całkowanie funkcji określonych na przedziale i przyjmujących wartości zespolone.
- Pochodna funkcji zespolonej i jej podstawowe własności (bez równań Cauchy'ego-Riemanna).

## 5. Ciągi i szeregi funkcyjne

- Zbieżność punktowa i jednostajna. Warunek Cauchy'ego na zbieżność jednostajną. Kryterium Weierstrassa.
- Związki zbieżności jednostajnej z ciągłością, różniczkowaniem i całkowaniem.
- Przykład funkcji ciągłej na całej prostej, która nie ma pochodnej w żadnym punkcie.

## 6. Szeregi potęgowe

- Szereg potęgowy, promień zbieżności, wzór Cauchy'ego-Hadamarda, własności sumy szeregu potęgowego w przedziale zbieżności (różniczkowanie i całkowanie w przypadku szeregu o wyrazach rzeczywistych).
- Rozwijanie funkcji w szereg potęgowy. Rozwinięcia funkcji wykładniczej i funkcji trygonometrycznych, szereg dwumienny.
- Przykład funkcji klasy  $\mathcal{C}^{(\infty)}$ , która nie jest analityczna.
- Zachowanie się sumy szeregu potęgowego na końcach przedziału zbieżności, twierdzenie Abela.
- Analityczne definicje funkcji trygonometrycznych, związek pomiędzy funkcją wykładniczą i funkcjami trygonometrycznymi, wzory Eulera.

## 7. Szeregi Fouriera

- Szereg Fouriera, wzory Eulera-Fouriera.
- Lemat Riemanna-Lebesgue'a.
- Całka Dirichleta, zasada lokalizacji. Zbieżność punktowa szeregu Fouriera.
- Zamkniętość układu trygonometrycznego. Nierówność Bessela i identyczność Parsewala.
- Postać zespolona szeregu Fouriera.

## 8. Przestrzenie metryczne

- Definicja i przykłady przestrzeni metrycznych.
- Przestrzeń  $\mathbb{R}^n$  jako przestrzeń metryczna.
- Zbiory otwarte i domknięte.
- Domknięcie, wnętrze i brzeg zbioru.
- Ciągi zbieżne w przestrzeniach metrycznych. Zbieżność w przestrzeni  $\mathbb{R}^n$ .
- Przestrzenie zupełne. Zupełność przestrzeni  $\mathbb{R}^n$ . Twierdzenie Banacha o kontrakcji.
- Zbiory zwarte. Zwartość podzbiorów przestrzeni  $\mathbb{R}^n$ , twierdzenia: Heinego-Borela i Bolzano-Weierstrassa.
- Spójność. Charakteryzacja spójnych podzbiorów prostej.
- Granica funkcji. Granica podwójna a granice iterowane.
- Ciągłość:
  - ciągłość złożenia i ciągłość funkcji odwrotnej;
  - własności funkcji ciągłych na zbiorach zwartych;
  - ciągłość a spójność, zbiory łukowo spójne, łukowa spójność obszaru w  $\mathbb{R}^n$ .
- Przestrzeń funkcji ciągłych na zbiorze zwartym.

## 9. Całka Riemanna-Stieltjesa

- Definicja i podstawowe własności całki Riemanna-Stieltjesa.
- Istnienie całki w przypadku całkowania funkcji ciągłej względem funkcji monotonicznej.

## LITERATURA

- [1] R. Engelking, K. Sieklucki, *Wstęp do topologii*, PWN, Warszawa 1986.
- [2] G.M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t. 1, 2 i 3 Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2007.
- [3] F. Leja, *Funkcje zespolone*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2006.
- [4] K. Kuratowski, *Rachunek różniczkowy i całkowy. Funkcje jednej zmiennej*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2008.
- [5] H. i J. Musielakowie, *Analiza matematyczna*, t. I, cz. 1 i 2, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2004 (t. I, cz. 1), 2002 (t. I, cz. 2).
- [6] W. Rudin, *Podstawy analizy matematycznej*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2009.
- [7] A. Sołtysiak, *Analiza matematyczna, Części I i II*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2009 (cz. I), 2004 (cz. II).

## Zbiory zadań

- [1] J. Banaś, S. Wędrychowicz, *Zbiór zadań z analizy matematycznej*, WNT, Warszawa 2006.
- [2] G.N. Berman, *Zbiór zadań z analizy matematycznej*, Wydawnictwo Pracowni Komputerowej Jacka Skalmierskiego, Gliwice 1999.
- [3] B. P. Demidowicz, *Zbiór zadań z analizy matematycznej*, t. 2 i 3, Naukowa Książka, Lublin 1993.
- [4] J. Długosz, *Funkcje zespolone. Teoria, przykłady, zadania*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2005.
- [5] M. Gewert, Z. Skoczylas, *Analiza matematyczna 1, Przykłady i zadania*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2010.
- [6] M. Gewert, Z. Skoczylas, *Analiza matematyczna 2, Przykłady i zadania*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2010.
- [7] N. M. Giunter, R. O. Kuźmin, *Zbiór zadań z matematyki wyższej*, t. II, PWN Warszawa 1959.
- [8] W. J. Kaczor, M. T. Nowak, *Zadania z analizy matematycznej*, t. 2 i 3, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2005 (t. 2) i 2006 (t. 3).
- [9] W. Krysicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach*, t. 1 i 2, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2008.
- [10] J. Krzyż, *Zbiór zadań z funkcji analitycznych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2005.
- [11] J. Rutkowski, *Zadania z funkcji analitycznych*, UAM, Poznań 1999.